OR RefCard III 2010

1 Modelos de Colas Básicos

1. Descripción de un Modelo de Colas
   - (a) Clientes, Población, Servidores, Cola.
   - (b) Elementos Básicos:
   - (c) Población: finita/infinita
   - (d) Llegadas: patrón deteminista/aleatorio; λ tasa media de llegadas; τ tpos entre llegadas; M llegadas exponenciales; llegadas estacionario-dependiente.estado-en.masa-impacientes
   - (e) Servicio: s tpo.servicio; μ tasa de servicio; $CV^2(s) = Var(s)/(E(s))^2$, $s.cte \sim CV^2(s) = 0$; $Erlang - k \sim CV^2(s) = 1/k$; $exponencial \sim CV^2(s) = 1$; $Hiperexponencial \sim CV^2(s) \geq 1$; servicio estacionario-dependiente.estado-en.masa
   - (f) Servidores: c.servidores.idénticos, linéas.espera,
   - (g) Etapas: múltiples-retroalimentación
   - (h) Capacidad: ilimitada/limitada; perdidas
   - (i) Disciplina de cola: FIFO, LIFO, SIFO; RR - PS; clases.prioridad (expulsiva)
   - (j) Notación de Kendall: $A/B/c/K/m/Z \sim$ distr.llegadas/distr.servicio/canales/capacidad/población/disciplina.cola
2. Variables Aleatorias y Medidas de Interés: rendimiento estacionario
   - (a) A número de clientes en el sistema $\pi_n = P(A) = lim_{n\to\infty} p_n(t)$
   - (b) Trabajo $W_s = 1/\mu$
   - (c) Intensidad de tráfico $r = \lambda/\mu = \lambda E(s) = E(s)/E(\tau)$
   - (d) Uso del servidor $\rho = r/c = \lambda/(c\mu)$; $\rho < 1$; $\rho = 1$; $\rho > 1$
   - (e) Caudal $\tilde{\lambda} \leq min\{\lambda, c\mu\}$
   - (f) Tpo sistema $W = E(w)$
   - (g) Tpo cola $q, W_q = E(q)$; $w = q + s$; $W = W_q + W_S$; $F_w(t), F_q(t), F_s(t)$
   - (h) N clientes sistema $L = E(N) = \sum n\pi_n$
   - (i) N clientes cola $N_q = E(N_q)$; $N = N_q + N_s$; $L = L_q + L_s$
   - (j) Formulas de Little: $L = \lambda W$; $L_q = \lambda W_q$; $L_s = \lambda W_s$
   - (k) π_n; a_n al llegar; b_n al salir; si llegadas y servicio son secuenciales $a_n = b_n$
   - (l) PASTA: $\pi_n = a_n, \forall n \geq 0$ (Poisson Arrivals See Time Averages)

2 Modelos de Colas Exponenciales

1. Introducción a las Colas Exponenciales: M/M
   - (a) Procesos Markov nacimiento (llegada) y muerte (salida). Estado $\equiv N(t)$
   - (b) E.Equilibrio: $\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1},\ldots,\lambda 0}{\mu_n,\ldots,\mu_1}}$, $\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_{n-1},\ldots,\lambda 0}{\mu_n,\ldots,\mu_1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
   - (c) C.Equilibrio: $S_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1},\ldots,\lambda 0}{\mu_n,\ldots,\mu_1} = 1/\pi_0 < \infty$, $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1/\lambda_n \Pi_{i=0}^{n-1} \lambda_i/\mu_{i+1})\infty \to \exists n_0, \forall n > n_0, \lambda_n/\mu_n < 1$.
2. Modelo $M/M/1$: un Servidor
   - (a) $\lambda_n = \lambda$, n=0,1,..., $\mu_n = \mu, n = 1, , 2 \ldots$, diagrama de transición
   - (b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0$, $\lambda\mu_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda + \mu)\pi_n, n \geq 1$
   - (c) C.E: $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty$, $S_1 = 1/\lambda \sum_{n=0}^{\infty} 1/\rho^n = \infty$, $\rho < 1 \to M/M/1$ ergódico
   - (d) $\pi_0 = 1/S_1 = 1 - \rho$, $\pi_n = (1-\rho)\rho^n \sim G(1-\rho)$, Servidor.ocupado $P(N = 1) = \rho$, $P(N \geq n) = \rho^n$
   - (e) $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$, $\sigma_N^2 = \frac{\rho}{(1-\rho^2)}$, $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = L - (1 - \pi_0)$, $L'_q = \frac{1}{1-\rho} = L_q/\rho^2$
   - (f) $W = E(w) = E(s)/(1-\rho)$, $W_q = E(q) = \rho E(s)/(1-\rho)$, $E(q|q > 0) = W$, $F_q(t) = 1 - \rho e^{-t/W}, t \geq 0$, $F_w(t) = 1 - e^{-t/W}, t \geq 0$
3. Modelos $M/M/1/K$: Capacidad K Finita del Sistema
   - (a) $\lambda_n = \{\lambda, n = 0, 1, \ldots, K-1; 0, n \geq K\}$, $\mu_n = \{\mu, n = 1, 2, \ldots, K; 0, n > K\}$
   - (b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0$, $\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda + \mu)\pi_n$, $\lambda\pi_{K-1} = \mu\pi_K$, $\sum_{n=0}^{K} \pi_n = 1$
   - (c) $\pi_n = (\lambda/\mu)^n \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}, \lambda \neq \mu, n = 0, 1, \ldots, K$, $\pi_n = \frac{1}{K+1}, \lambda = \mu, n = 0, 1, \ldots, K$

(d) $L = \frac{\lambda(1-(K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1})}{(\mu-\lambda)(1-(\lambda/\mu)^{K+1})}, \lambda \neq \mu$, $L = K/2, \lambda = \mu$

(e) $L_s = 1-\pi_0$, $L_q = L-(1-\pi_0)$, $\lambda_e = \lambda(1-\pi_K)$, $\rho = \lambda_e W = 1-\pi_0$

(f) $W = L/\lambda_e$, $W_q = L_q/\lambda_e$, $E(q|q>0) = W_q/\rho$,
$F_w(t) = 1-\sum_{n=0}^{K-1} q_n F_{\mathcal{P}(\mu\sqcup)}(n)$, $F_q(t) = 1-\sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} F_{\mathcal{P}(\mu\sqcup)}(n)$,
$F_{\mathcal{P}(\mu\sqcup)}(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} = \int_t^\infty \mu \frac{\mu^n x^n e^{-\mu x}}{n!} dx$

4. Modelo $M/M/c$: c Servidores Paralelos

(a) $\lambda_n = \lambda, n = 0,1,\ldots$, $\mu_n = n\mu, n = 1,2\ldots,c; \mu_n = c\mu, n \geq c$

(b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0$; $\lambda\pi_{n-1} + (n+1\mu\pi_{n+1}) = (\lambda+n\mu)\pi_n, 1 \leq n \leq c-1$; $\lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1} = (\lambda+c\mu)\pi_n, n \geq c$

(c) $\pi_0 = [\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\lambda/(c\mu))}]^{-1}$; $\pi_n = \pi_0 r^n/n!, n = 0,1,\ldots,c; \pi_n = \pi_0 r^n/(c! c^{n-c}), n \geq c$

(d) $C(c,r) = P(N \geq c) = \pi_0 r^c/(c!(1-\rho))$

(e) $L_q = C(c,r)\frac{\rho}{1-\rho}$, $W_q = \frac{C(c,r)}{c\mu(1-\rho)}$, $E(q|q>0) = \frac{1}{c\mu(1-\rho)}$, $W = W_q + W_s = 1/\mu(1+\frac{C(c,r)}{c(1-\rho)})$, $L = \lambda W = c\rho + C(c,r)\frac{\rho}{1-\rho}$

(f) $F_q(t) = 1-C(c,r)e^{-(1-\rho)c\mu t}; q_l = \frac{1}{c\mu(1-\rho)} ln(\frac{C(c,r)}{1-l})$;
$F_w(t) = 1+\frac{r-c+1-C(c,r)}{c-1-r}e^{-\mu t}, r \neq c-1; 1-[1+C(c,r)\mu t]e^{-\mu t}, r = c-1$

(g) Dos servidores: $\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$, $\pi_n = 2\rho^n\pi_0$, $C(2,r) = \frac{2\rho^2}{1+\rho}$, $L_q = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$, $W_q = \frac{\rho^2 E[s]}{1-\rho^2}$, $L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$, $W = \frac{E[s]}{1-\rho^2}$

5. Modelo $M/M/\infty$: Infinitos Servidores

(a) $\lambda_n = \lambda, n = 0,1,2,\ldots$, $\mu_n = n\mu, n = 0,1,2,\ldots$

(b) EE: $\mu\pi_1 = \lambda\pi_0; \lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1} = (\lambda+n\mu)\pi_n, n \geq 1$

(c) $N \sim P(r = \lambda/\mu), \pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-(\lambda/\mu)}}{n!}, n = 0,1,\ldots$

(d) $L = \lambda/\mu, \sigma_N^2 = \lambda/\mu, L_q = W_q = 0, W = W_s = 1/\mu, w \sim s \sim Exp(\mu)$

3 Modelos de Colas Avanzados: Redes de Colas

Redes de colas: conjunto de nodos interconectados de forma asíncrona y concurrente. Estructura topolólogica, trayectorias de los clientes, procesos estocásticos y dinámica de estados del sistema.

1. Redes Abiertas

(a) Teorema de Burke: el proceso de salidas de clientes de un sistema $M/M/c$ estable con tasa de llegadas λ es un proceso de Poisson de tasa λ.

(b) Colas en serie:

i. EE: $\mu_2\pi_{0,1} = \lambda\pi_{0,0}$;
$\lambda\pi_{n-1,0} + \mu_2\pi_{n,1} = (\lambda+\mu_1)\pi_{n,0}$;
$\mu_1\pi_{1,m-1} + \mu_2\pi_{0,m+1} = (\lambda+\mu_2)\pi_{0,m}$;
$\lambda\pi_{n-1,m} + \mu_1\pi_{n+1,m-1} + \mu_2\pi_{n,m+1} = (\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_{n,m}$; $\sum_{n,m}\pi_{n,m} = 1$

ii. $\pi_{n,m} = \pi_n^1\pi_m^2$

iii. $L = \lambda/(\mu_1-\lambda) + \lambda/(\mu_2-\lambda)$;
$W = L/\lambda = 1/(\mu_1-\lambda) + 1/(\mu_2-\lambda)$;
$W_q = W - (1/\mu_1 + 1/\mu_2)$

(c) Redes de Jackson Abiertas (R nodos). Teorema:

i. cada nodo i tiene c_i servidores indénticos con tiempo de servicio exponencial de tasa μ_i.

ii. los clientes llegan al nodo i desde fuera del sistema según un proceso de Poisson de tasa λ_i y desde otros nodos.

iii. los clientes que salen de un nodo i pasan instantaneamente al nodo j con probabilidad p_{ij} o abandonan la red con probabilidad $1-\sum_{j=1}^R p_{ij}$

iv. $\rightarrow \Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^R \Lambda_j p_{ij}, \forall i$ y $\pi(n_1,\ldots,n_R) = \Pi_{j=1}^R \pi(n_j)$,
donde cada nodo $\equiv M/M/c_i$ con tasas Λ_i y μ_i si $\Lambda_i < c_i\mu_i \forall i$.

v. $L = \sum L_i$, $W = L/\sum\lambda_i$.

References

[1] Ríos-Insua, S., Mateos-Caballero, A., Bielza, C., Jimenez-Martín, A. (2004), Investigación Operativa. Modelos determinísticos y estocásticos Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.